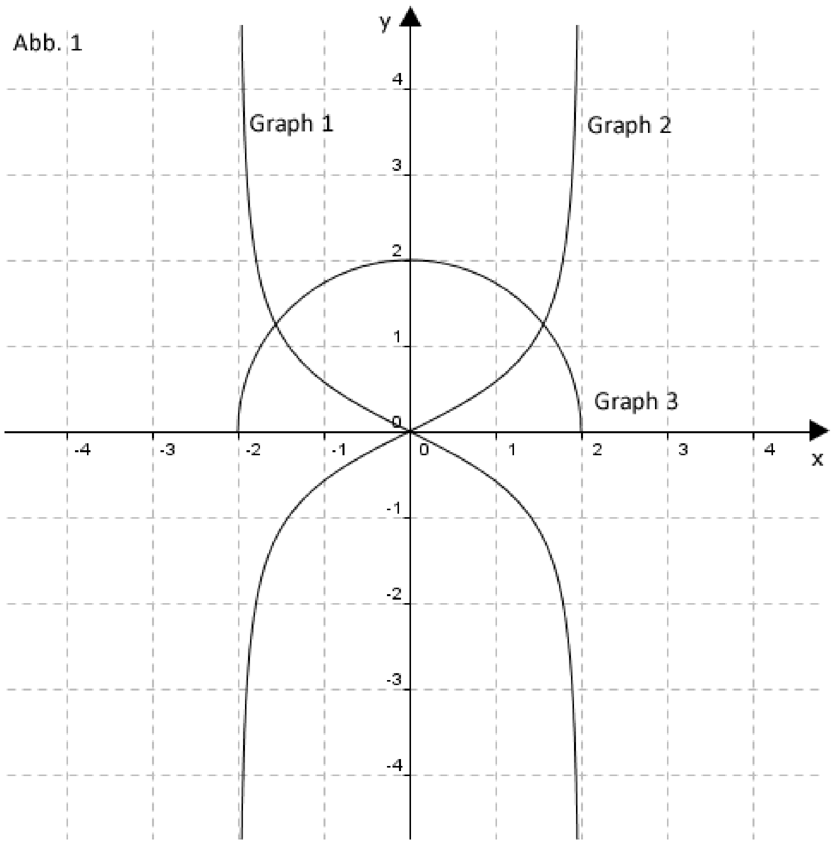
Abitur 2009 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A1

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,,\ a \in \mathbb{R}^+\,.$

Teilaufgabe 1. (9 BE)

In Abb. 1 sind der Graph einer Funktion dieser Schar, der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion sowie ein weiterer Graph abgebildet.
Entscheiden Sie, welcher Graph zur Ableitungsfunktion gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand von Eigenschaften der abgebildeten Scharfunktion.
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a derjenigen Scharfunktion, die abgebildet ist.
Beschreiben Sie allgemein die Auswirkung des Parameters a auf den Verlauf der Funktionsgraphen der Schar.



Teilaufgabe 2. (9 BE)

Bestimmen Sie die erste Ableitung der allgemeinen Scharfunktion f_a unter Angabe der benutzten Regel.
Die Graphen von f_a und f_a' weisen jeweils ein bestimmtes Symmetrieverhalten auf. Weisen Sie dies rechnerisch nach.
Geben Sie die Definitionsbereiche von f_a und f_a' an.

Teilaufgabe 3. (10 BE)

Einem Halbkreis mit Radius a wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt (siehe Abb. 2). Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzialrechnung die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird, und berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt.

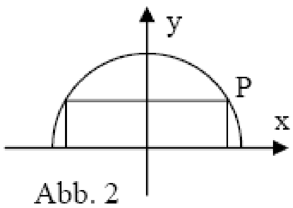


Abb. 2

Im Folgenden wird das Integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d\,x$ betrachtet.

Teilaufgabe 4.1 (12 BE)

Erklären Sie jeden der Umformungsschritte in den Zeilen (1) und (2) der Rechnung in Abb. 3.
Geben Sie an, was beim Übergang von Zeile (2) zu Zeile (3) geschieht.

$$(1)\quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(z)}\cdot\cos(z)\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\,dz$$

$$(2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\,dz = [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(z)\,dz$$

$$= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\,dz$$

$$\Rightarrow\quad (3)\quad 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\,dz = [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dz$$

Abb. 3

Teilaufgabe 4.2

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,d\,x$.

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.